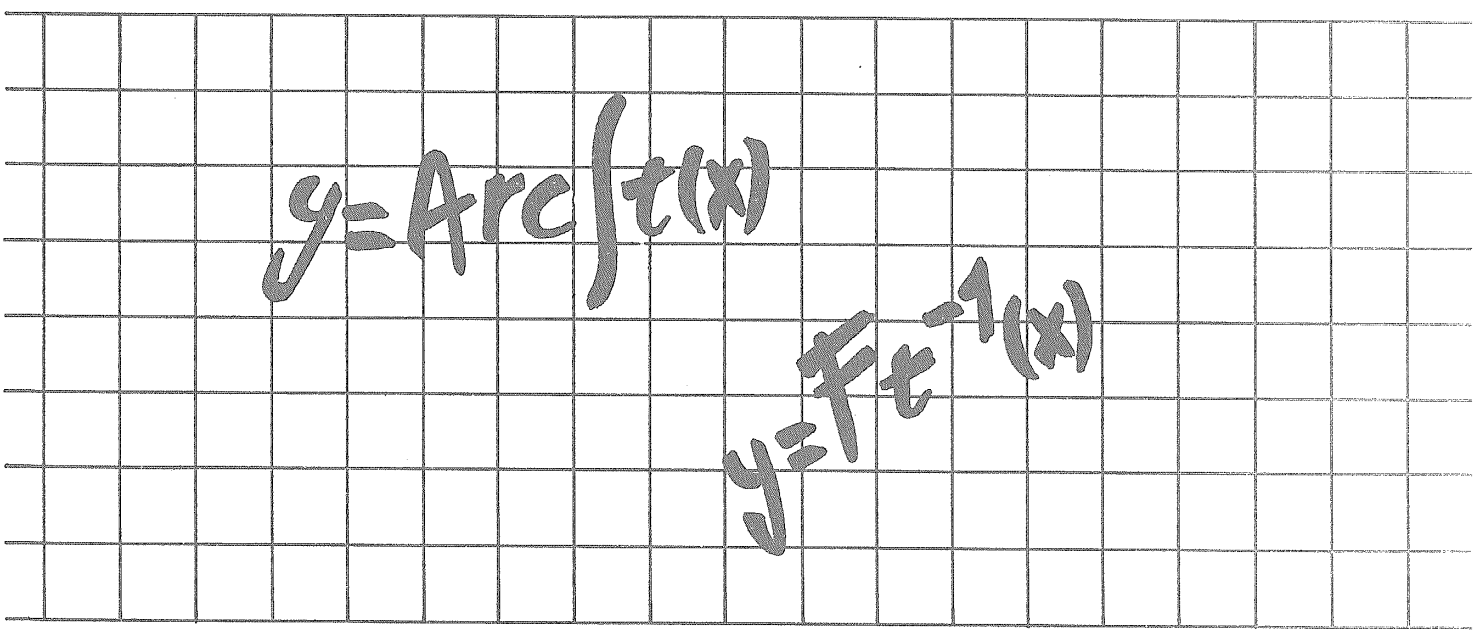
LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. Resoluciones de triángulos rectos
3. El círculo trigonométrico
4. Las funciones trigonométricas
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. Resolución de triángulos cualesquiera
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 5

Trigonometría

Módulo 5

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0844-X

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

5.1 Las funciones seno y arcoseno 9

5.2 Las funciones coseno y arcocoseno 43

5.3 Las funciones tangente y arcotangente 53

5.4 Las funciones cotangente y arcocotangente 64

5.5 Las funciones secante y arcosecante 70

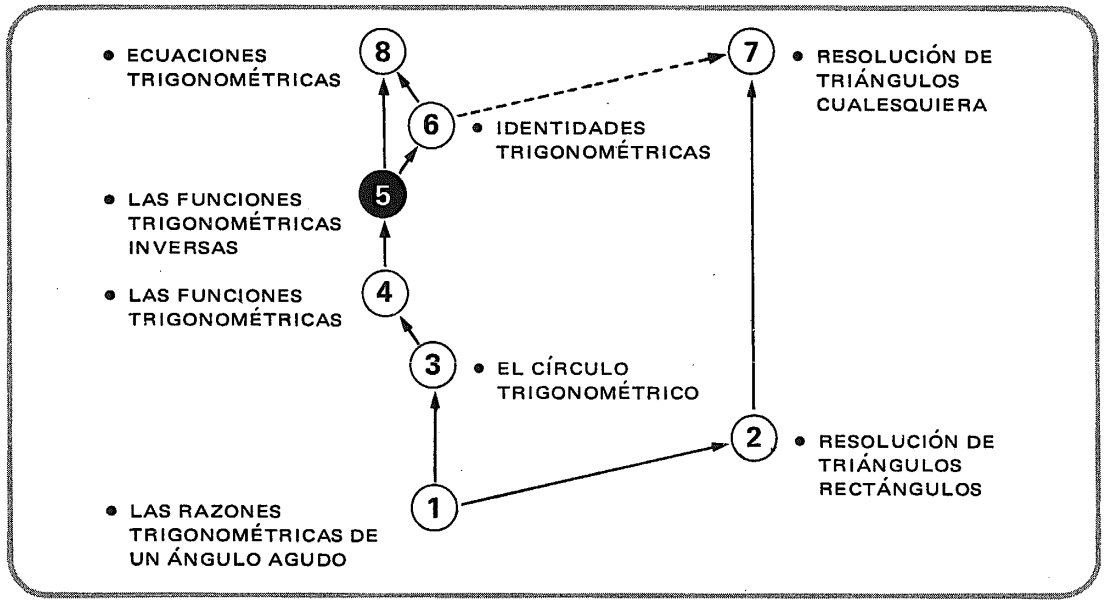
5.6 Las funciones cosecante y arcosecante 76

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 5. Las funciones trigonométricas inversas

Objetivos: caracterizar cada una de las seis funciones trigonométricas inversas

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Relación y función (concepto, elementos, clasificación y representación gráfica)	2	7, 8
• Concepto de función inversa	2	10
• Las razones trigonométricas de un ángulo agudo	5	1
• El círculo trigonométrico	5	3
• Las funciones trigonométricas directas	5	4

5.1

Las funciones Seno y Arcoseno

1

Recordemos
algunas cosas
relacionadas con
las funciones inversas.

2

Consideremos
la siguiente relación
definida por extensión.

$$R = \{(1, 2), (1, 5), (2, 6), (3, 7), (5, 7)\}$$

3

Si intercambiamos los componentes de
cada uno de los pares ordenados obtenemos
otra relación:

$\{(2, 1), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (7, 5)\}$

4

A esta nueva relación

$$\{(2, 1), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (7, 5)\}$$

le llamamos **inversa** de la relación original,
y la simbolizamos así:

$$R^{-1}$$

5

El **dominio** de la relación

$$R = \{(1, 2), (1, 5), (2, 6), (3, 7), (5, 7)\}$$

es

definido por extensión

$\{1, 2, 3, 5\}$

6

El **rango** de la relación

$$R = \{(1, 2), (1, 5), (2, 6), (3, 7), (5, 7)\}$$

es _____

$\{2, 5, 6, 7\}$

7

El **dominio** de la relación

$$R^{-1} = \{(2, 1), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (7, 5)\}$$

es _____

$\{2, 5, 6, 7\}$

8

El **rango** de la relación

$$R^{-1} = \{(2, 1), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (7, 5)\}$$

es _____

$\{1, 2, 3, 5\}$

9

Resumiendo:

dominio de R

$\{1, 2, 3, 5\}$

dominio de R^{-1}

$\{2, 5, 6, 7\}$

rango de R

$\{2, 5, 6, 7\}$

rango de R^{-1}

$\{1, 2, 3, 5\}$

Observamos que:

el dominio de R^{-1} es igual a [ ]

el rango de R^{-1} es igual a [ ]

el rango de R

el dominio de R

10

Completar.

En general,

el dominio de una relación inversa (R^{-1}) *es igual al rango de la relación original* (R)

el rango [ ]

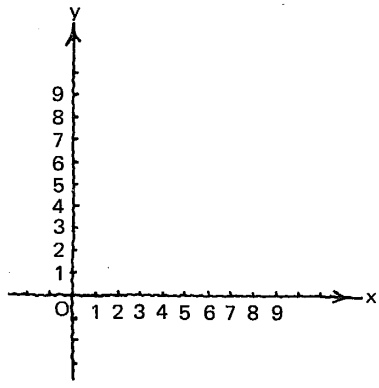
[ ]

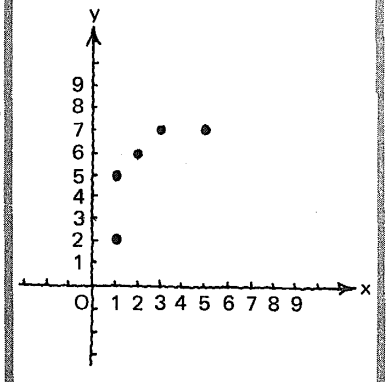
de una relación inversa (R^{-1}) *es igual al dominio de la relación original* (R)

11

Hagamos, ahora, la gráfica cartesiana de

$R = \{(1, 2), (1, 5), (2, 6), (3, 7), (5, 7)\}$



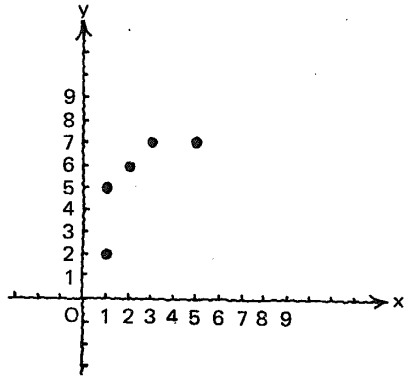


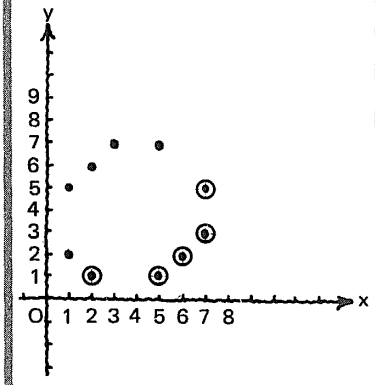
12

Representemos en el mismo sistema cartesiano la relación inversa

$R^{-1} = \{(2, 1), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (7, 5)\}$

empleando puntos encerrados en un círculo ⊙.





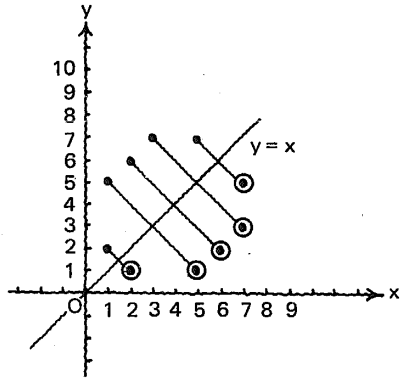
13

Podemos observar la

simetría

de las gráficas de R y R^{-1} respecto de la recta

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x\}$



14

Si la relación R está representada por medio de una tabla, como ésta:

x	y
1	2
1	5
2	6
3	7
5	7

la tabla de la relación inversa R^{-1} puede obtenerse intercambiando los componentes x e y

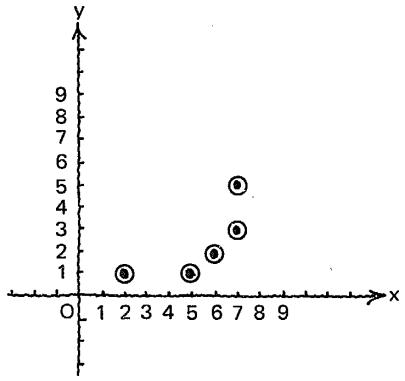
x	y

x	y
2	1
5	1
6	2
7	3
7	5

15

Tabla y gráfica cartesiana de la relación inversa R^{-1}.

x	y
2	1
5	1
6	2
7	3
7	5



16

Ahora bien,
para determinar la

regla de correspondencia

de la relación inversa,
expresada en la forma $y = f(x)$:

1. se intercambian las literales **x** e **y** en la regla de correspondencia de la relación original, y
2. se "despeja" y.

17

Por ejemplo:
si la regla de correspondencia está expresada así → $y = x + a$

para obtener la regla de correspondencia de la relación inversa, intercambiamos, en primer lugar, las literales **x** e **y**, así: → $\square$

$x = y + a$

18

Enseguida,
para "despejar" **y**,
introducimos un
nuevo símbolo (–)

$$\boxed{y = x + a}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x = y + a}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{}$$

$y = x - a$

el nuevo símbolo

19

Observar
con
atención.

$$\boxed{y = x + a}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x = y + a}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{y = x - a}$$

20

Otro ejemplo:

si la regla de
correspondencia está
dada por ⟶

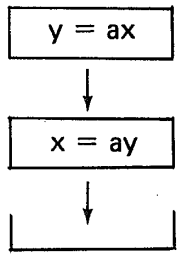
$$\boxed{y = ax}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{}$$

1. intercambiamos las literales
   x e **y**, y obtenemos

$x = ay$

21

2. luego, "despejamos" y,, introduciendo un nuevo símbolo:



$y = x \div a$

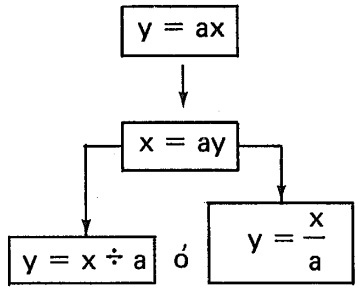
o bien

$y = \frac{x}{a}$

el nuevo símbolo

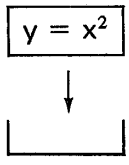
22

Observar con atención.



23

Un tercer ejemplo:
si la regla de correspondencia tiene este aspecto →



1. al intercambiar las literales **x** e **y**, obtenemos

$x = y^2$

24

2. para "despejar" **y** necesitamos un nuevo símbolo:

$y = x^2$

↓

$x = y^2$

↓

[ ]

$y = \sqrt{x}$

↑

el nuevo símbolo

25

Observar con atención.

$y = x^2$

↓

$x = y^2$

↓

$y = \sqrt{x}$

26

Un ejemplo más:

si la regla de correspondencia la escribimos así → $y = a^x$

↓

1. intercambiamos literales

[ ]

$x = a^y$

27

2. y "despejamos" **y** introduciendo un nuevo símbolo:

$y = a^x$

↓

$x = a^y$

↓

[ ]

$y = \log_a x$

[ ]

↑

el nuevo símbolo

28

Observar con atención.

$y = a^x$

↓

$x = a^y$

↓

$y = \log_a x$

29

Ahora,
si la regla de correspondencia está dada por nuestra ya familiar expresión → $y = \text{sen } x$

para obtener la regla de correspondencia de la relación inversa

1. intercambiamos, primero, literales

↓

[ ]

$x = \text{sen } y$

30

2. y para "despejar" **y** necesitamos un nuevo símbolo: $\lfloor\_\_\_\_\rfloor$ ¡intentemos recordarlo!

$y = \text{sen } x$

$x = \text{sen } y$

$y = \lfloor\_\_\_\_\rfloor$

arcsen ó sen^{-1}

arcsen x ó sen^{-1} x

31

Observar con atención.

$y = \text{sen } x$

$x = \text{sen } y$

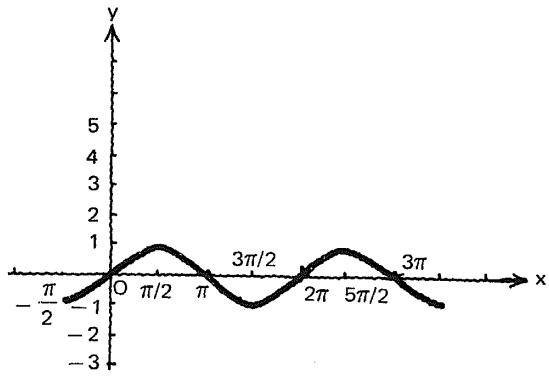
$y = \text{arcsen } x$ ó $y = \text{sen}^{-1} x$

32

Hemos encontrado que la gráfica correspondiente a

y = sen x

tiene este aspecto.

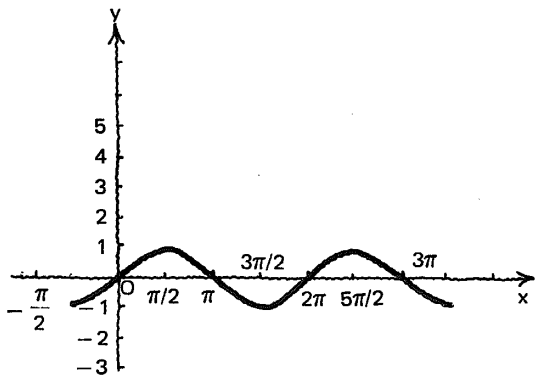


33

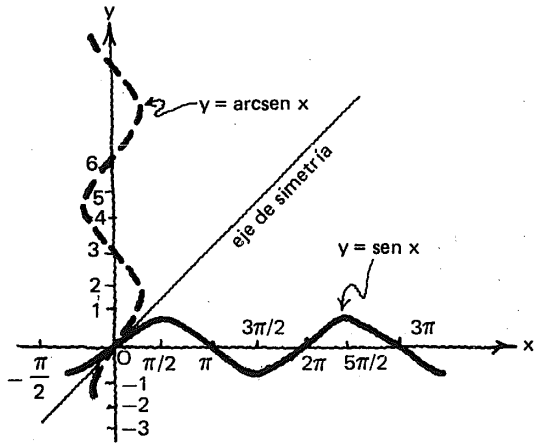
¿Cómo será la gráfica cartesiana de la inversa de la relación definida por

$y = \text{sen } x$?

Intentemos trazarla, con línea punteada.



Respuesta en el cuadro siguiente



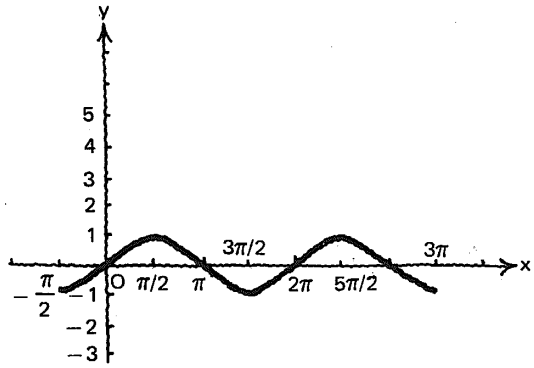
34

¿Es la relación definida por

$y = \text{sen } x$

una **función?**

Sí/No



Sí

35

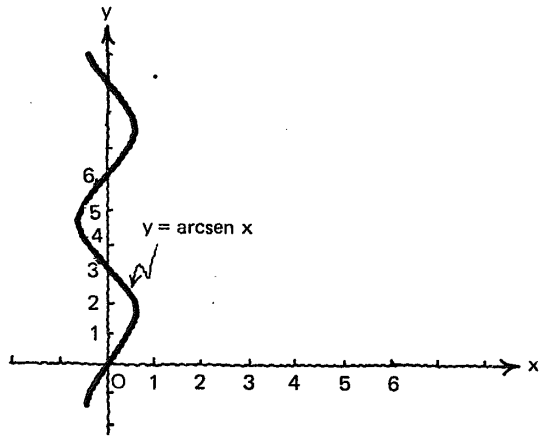
¿Es la relación definida por

y = arcsen x

una función?

Sí/No

¿Por qué?



No

Porque en su correspondiente gráfica cartesiana, sí hay al menos una vertical que interseca a la gráfica en dos o más puntos.

36

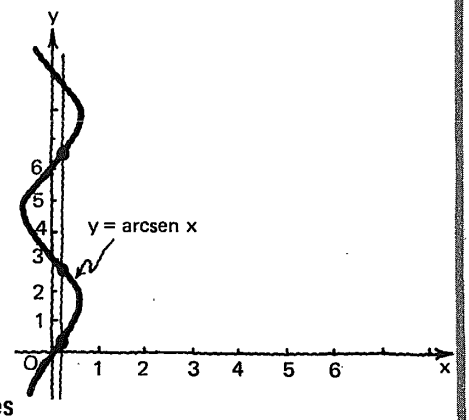
La expresión

y = arcsen x.

podemos interpretarla así:

y *es igual al ángulo cuyo seno es* **x.**

Sabemos que:
a cada número real que representa un seno existe una infinidad de números reales que representan los ángulos correspondientes a ese seno.



37

Por ejemplo:

si sen $x = \frac{1}{2}$

$y = \text{arcsen } x =$

Cualquiera de los elementos del conjunto

$$\left\{\ldots -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \ldots\right\}$$

o bien, del conjunto

$$\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\right\}$$

$k \in \mathbb{Z}$

38

Ahora bien,
nos interesa definir
una

función seno

para la cual

su inversa

sea también

una función.

39

Empezaremos
preguntándonos,

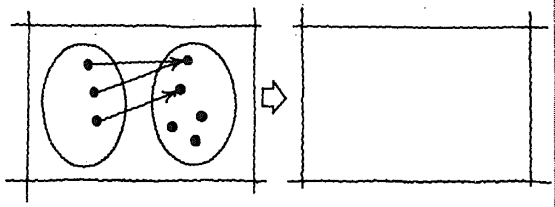
¿qué se requiere
para que
la inversa de una función
sea también una función?

Intentemos recordar.

Se requiere que
la función original
sea biyectiva.

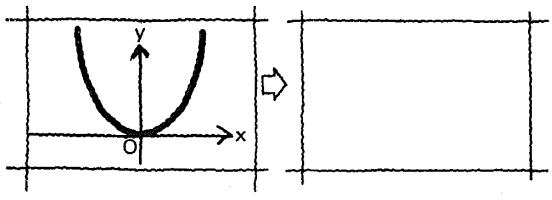
40

Representemos
gráficamente
las relaciones
inversas.

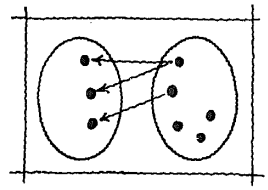


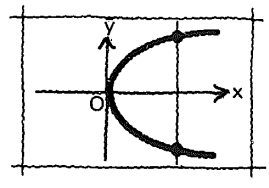
Ahora, veamos:

la inversa
de una
función cualquiera,
¿es una función?



Sí No

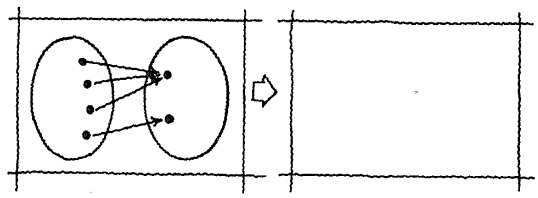




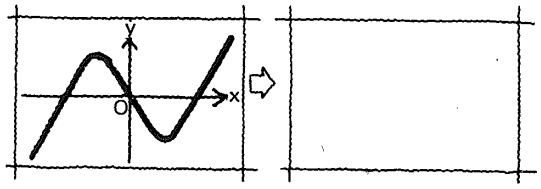
No

41

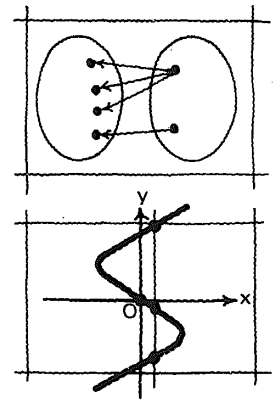
Representar gráficamente las relaciones inversas.



La inversa de una suprayección, ¿es una función?



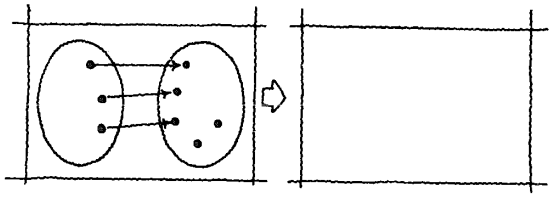
Sí/No



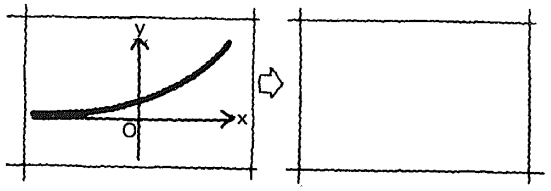
• No

42

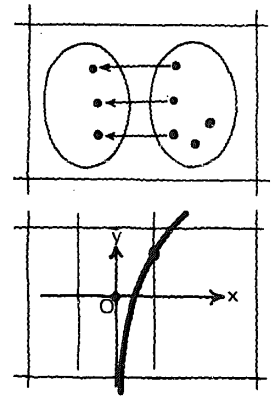
Representar gráficamente las relaciones inversas.



La inversa de una inyección, ¿es una función?



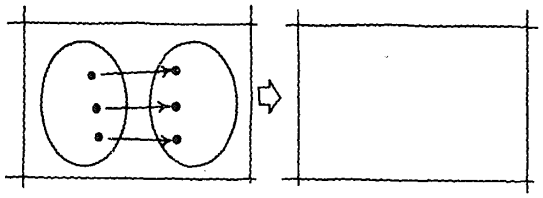
Sí/No



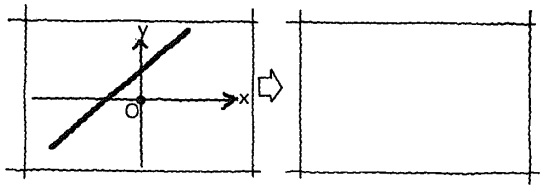
• No

43

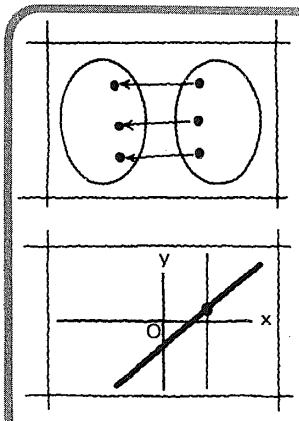
Representar gráficamente las relaciones inversas.



La inversa de una biyección, ¿es una función?



Sí/No



• Sí

44

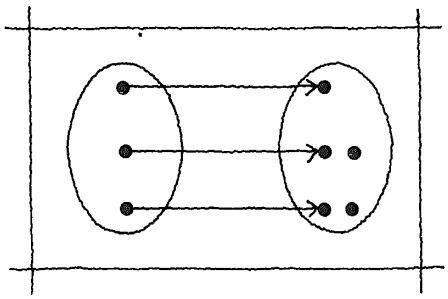
¡Mucha atención!

¿Qué sería necesario hacer para

definir una biyección

a partir de esta

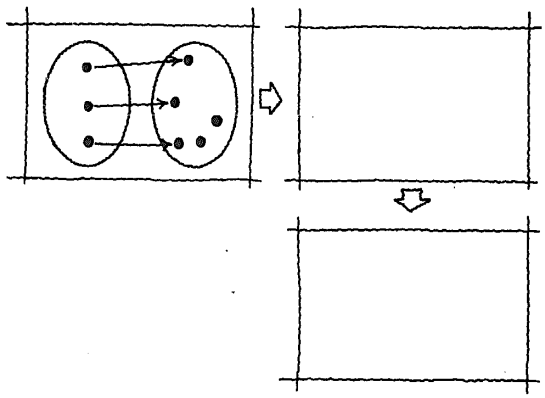
inyección?

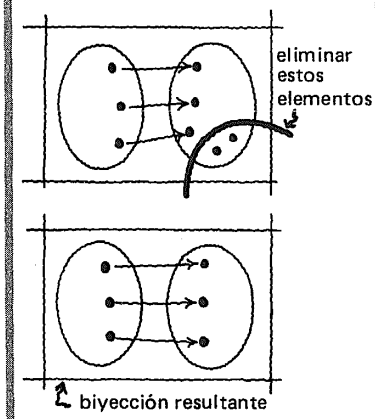


Restringir el codominio de la inyección.

45

Indicar la transformación requerida y la función redefinida.





46

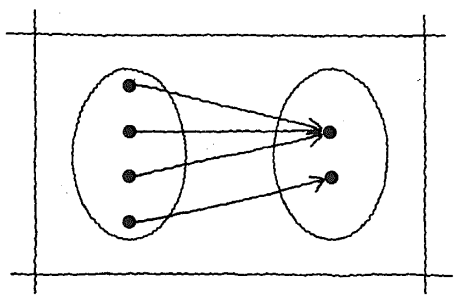
¡Mucha atención!

¿Qué sería necesario hacer para definir una

biyección

a partir de esta

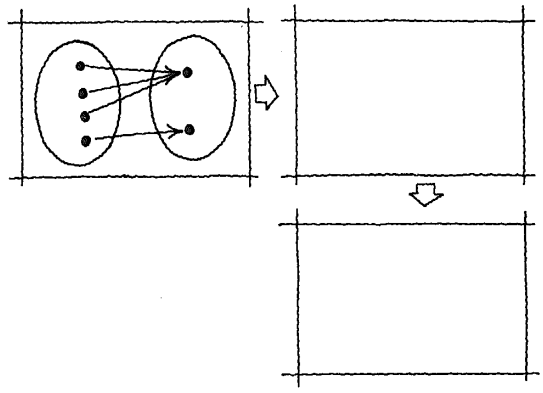
suprayección?

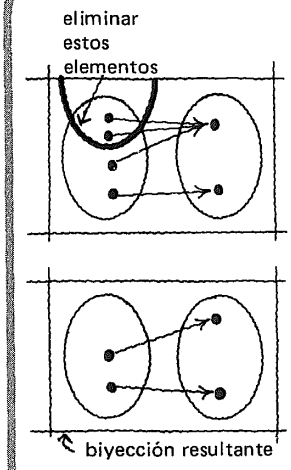


Restringir el dominio de la suprayección.

47

Indicar la transformación requerida y la función redefinida.

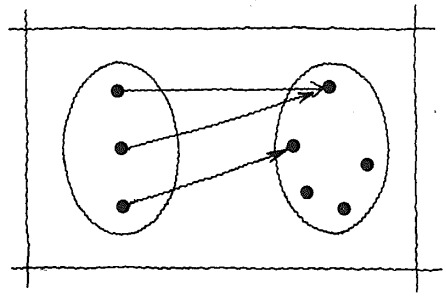




48

¡Mucha atención!

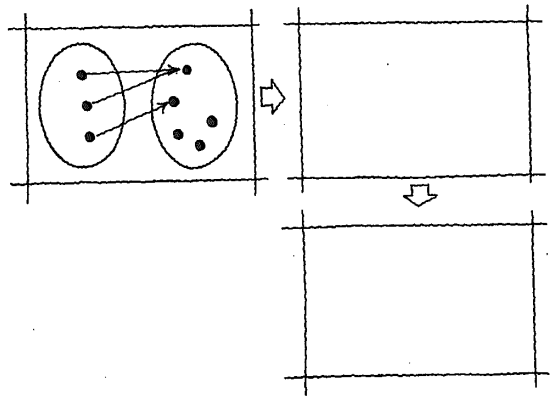
¿Qué sería necesario hacer para definir una **biyección** a partir de esta **función cualquiera?**

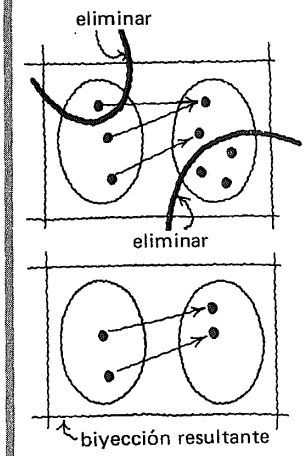


Restringir el dominio y el codominio de la función cualquiera.

49

Indicar la transformación requerida y la función redefinida.





50

Entonces,
si queremos definir
una

función seno

para la cual
su inversa sea una función,
necesitaremos
definir una

biyección seno.

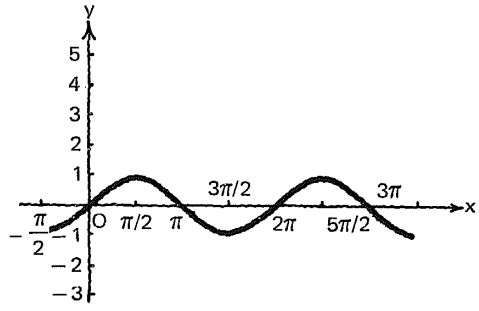
51

Recordemos que la expresión

$$F = \{(x\ y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R} \wedge y = \text{sen } x\}$$

define una función:

cualquiera ⌊⌋
suprayectiva ⌊⌋
inyectiva ⌊⌋
biyectiva ⌊⌋



cualquiera

52

Para la función F así definida:

el **dominio** es ⌊_____⌋ ;

el **codominio** es ⌊_____⌋ .

$\mathcal{R}$

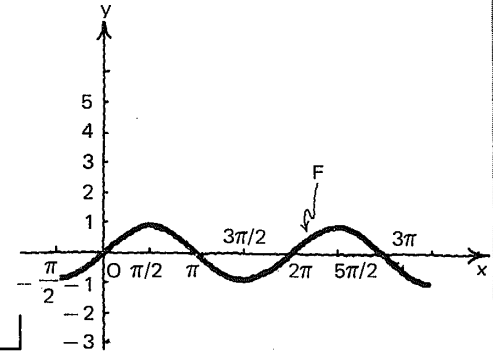
$\mathcal{R}$

53

¿Qué restricción necesitamos hacer para definir una

suprayección

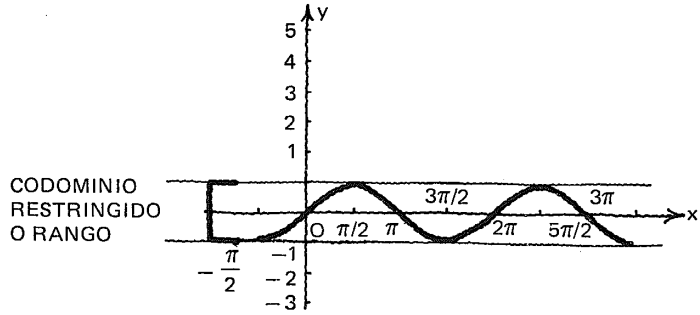
a partir de la función cualquiera F?



Restringimos el codominio $\mathcal{R}$ al rango

$\{y/y \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

54

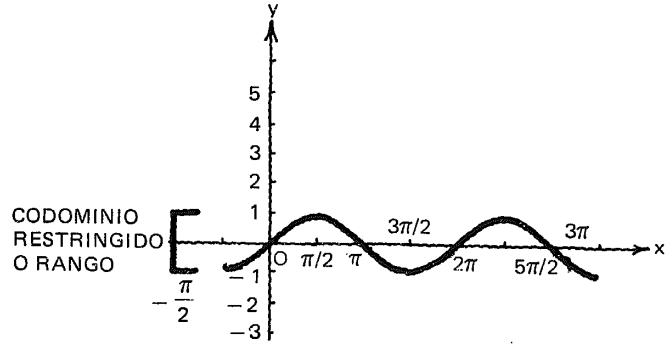


Queda así definida la **suprayección**:

$$F' = \{(x, y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1 \wedge y = \text{sen } x\}$$

CODOMINIO RESTRINGIDO

55



Hace falta ahora, definir una **biyección** a partir de esta suprayección, para lo cual es necesario **restringir el dominio.**

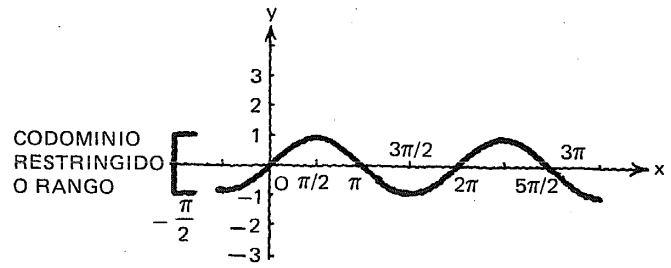
56

Se trata de seleccionar un intervalo, dentro del dominio $\mathbb{R}$, de manera que:

1. a cada valor de **x** le corresponda un único valor de y = sen x
   y

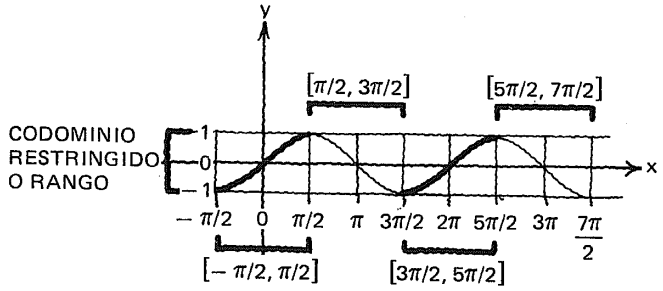
2. estén considerados *todos* los elementos del *rango.*

57



Hay varios intervalos que satisfacen las dos condiciones enunciadas en el cuadro anterior. Intentemos señalarlos.

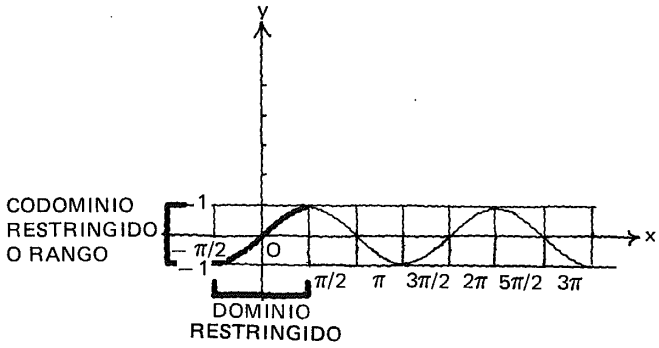
Respuesta en el cuadro siguiente



Por ejemplo, los intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$

satisfacen las condiciones señaladas. De ellos escogeremos, arbitrariamente, el intervalo: $[-\pi/2, \pi/2]$

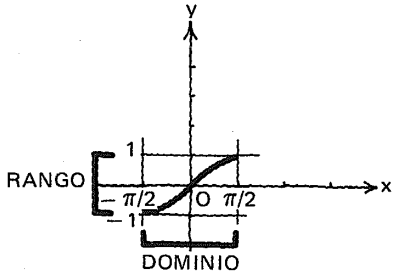
58



59

Esta es la
representación gráfica
de lo que podemos llamar la

función seno "restringida"

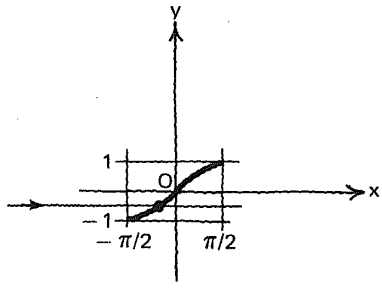


60

Observamos que:
esta gráfica corresponde
a una

[ ]

pues toda "horizontal"
interseca a la curva
en un punto único.



biyección

61

Cuando nos
refiramos a esta
función seno
"restringida"
utilizaremos la expresión

y = Sen x

62

Definición de la función seno "restringida".

$$F = \left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge \underbrace{-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}}_{\text{DOMINIO}}; \underbrace{y \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1 \wedge y = \text{Sen } x}_{\text{RANGO}}\right\}$$

o bien

$$F : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[-1, 1\right] / y = \text{Sen } x$$

63

Siendo
la función definida por

y = Sen x

una biyección, su

inversa

es/no es

una función.

es

64

La regla de correspondencia de la inversa de la función definida por

$$y = \text{Sen } x$$

la expresaremos así:

$$y = \textbf{Arcsen } x$$

o bien

$$y = \textbf{Sen}^{-1} x$$

65

Recordemos que:

el **dominio** de la función inversa es igual a [ ]

y

el **rango** de la función inversa es igual a [ ]

el **rango** de la función original

el **dominio** de la función original

66

Entonces,

el **dominio** de F^{-1} será [ ]

el **rango** de F^{-1} será [ ]

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\}$

67

Establecidos: el dominio, el rango y la regla de correspondencia, podemos definir la

función Arcoseno

así:

_____

o así:

_____

Respuesta en el cuadro siguiente

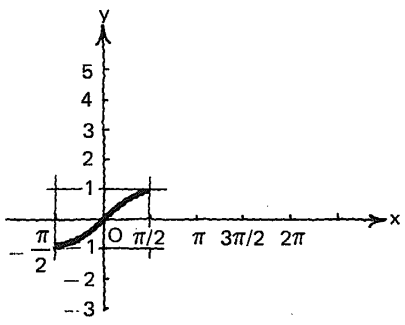
- $F^{-1} = \left\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1;\ y \in \mathbb{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \wedge y = \text{Arcsen } x\right\}$

- $F^{-1} : \left[-1, 1\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / f(x) = \text{Arcsen } x$

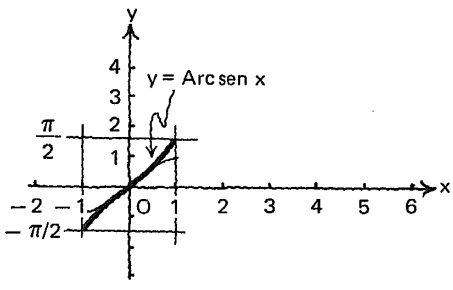
$f(x) = \text{Sen}^{-1} x$

68

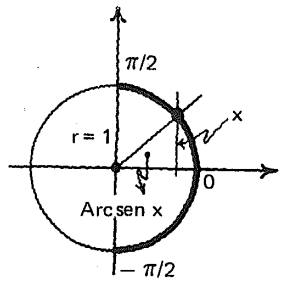
Estudiar con atención.



- Gráfica de y = Sen x



- Gráfica de y = Arcsen x



- Rango de y = Arcsen x

69

Escribir con 4 cifras decimales.

Arcsen 0.75 $\doteq$ [ ] radianes,

$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),

$\doteq$ [ ] en grados.

Usar una tabla de funciones trigonométricas o una calculadora.

0.8481

$\frac{0.8481 \times \pi}{3.1416} \doteq 0.2700\pi$

$48.59° \doteq 48°35'$

70

Arcsen 0.8660 $\doteq$ [ ] radianes,

$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),

$\doteq$ [ ] en grados.

1.0471

$0.3333\pi \doteq \frac{\pi}{3}$

60°

71

Arcsen 1.000 $\doteq$ [ ] radianes,

$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),

$\doteq$ [ ] en grados.

1.5708

$0.5000\pi \doteq \frac{\pi}{2}$

90°

72

Arcsen 0.1847 $\doteq$ [ ] radianes,

$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),

$\doteq$ [ ] en grados.

0.1858

0.0591π

$10.64° \doteq 10°38'$

73

Arcsen 0.0654 $\doteq$ [ ] radianes,

$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),

$\doteq$ [ ] en grados.

0.0654

0.0208π

$3.75° \doteq 3°45'$

74

Arcsen 0.0047 $\doteq$ [ ] radianes,

$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),

$\doteq$ [ ] en grados.

0.0047

0.0015π

$0.2693° \doteq 0°16'$

75

Arcsen 0 = [ ] radianes,
= [ ] radianes (en términos de π),
= [ ] en grados.

0
0
0

76

Arcsen -0.1288 $\doteq$ [ ] radianes,
$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),
$\doteq$ [ ] en grados.

-0.1292
-0.0411π
$-7.40° \doteq -7°24'$

77

Arcsen -0.0025 $\doteq$ [ ] radianes,
$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),
$\doteq$ [ ] en grados.

-0.0025
-0.0008π
$-0.1432° \doteq -0°09'$

78

Hemos encontrado:

Arcsen 0.1847 ≐ 0.1858 radianes
Arcsen 0.0654 ≐ 0.0654 radianes
Arcsen 0.0047 ≐ 0.0047 radianes
Arcsen 0.0000 ≐ 0.0000 radianes
Arcsen −0.0025 ≐ −0.0025 radianes
Arcsen −0.1288 ≐ −0.1292 radianes

Debemos observar que, para valores de Sen x próximos a cero, se verifica que:

Arcsen x ≐ Sen x en radianes.

79

$\text{Arcsen}\left(-\frac{5}{6}\right)$ ≐ [_____] radianes,
≐ [_____] radianes (en términos de π),
≐ [_____] en grados.

$-\frac{5}{6} \doteq -0.8333$

-0.9851

-0.3136π

$-56.44° \doteq -56°26'$

80

Arcsen −1 = [_____] radianes,
= [_____] radianes (en términos de π),
= [_____] en grados.

-1.5708

$-0.5\pi = -\frac{\pi}{2}$

$-90°$

81

Arcsen 2.45 ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

2.45 no está en el dominio de la función definida por
$y = \text{Arcsen } x$

$2.45 > 1$

82

$\text{Arcsen}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.7071$

0.7854

$0.25\pi = \dfrac{\pi}{4}$

45°

83

Arcsen π ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

$\pi \doteq 3.1416$

π no está en el dominio de la función definida por $y = \text{Arcsen } x$
$\pi > 1$

5.5.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

84

¡Atención!

arcsen 0.3847 ≐ [_____] radianes,

≐ [_____] π radianes,

≐ [_____]°.

Estudiar con atención este cuadro y los siguientes:

- cualquier elemento del conjunto:

$$\cup \begin{matrix}\{y/y \doteq 0.3949 + 6.2832k\} \\ \{y/y \doteq 2.7467 + 6.2832k\}\end{matrix}$$

- cualquier elemento del conjunto:

$$\cup \begin{matrix}\{y/y \doteq 0.1257\pi + 2k\pi\} \\ \{y/y \doteq 0.8743\pi + 2k\pi\}\end{matrix}$$

- cualquier elemento del conjunto:

$$\cup \begin{matrix}\{y/y \doteq 22.63^\circ + 360^\circ k\} \\ \{y/y \doteq 157.37^\circ + 360^\circ k\}\end{matrix}$$

(en todas las expresiones $k \in$)

85

En $y = \text{arcsen } x$

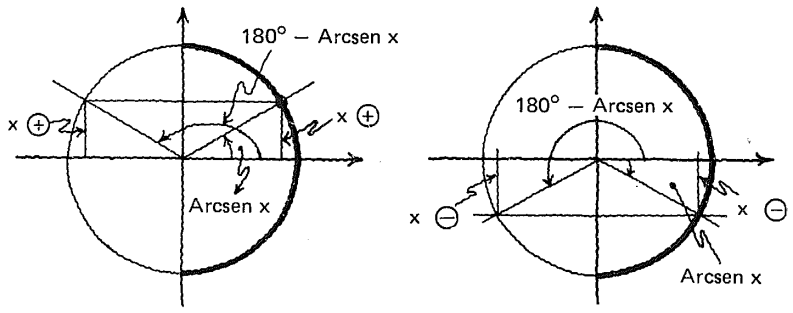
para toda **x**,
e **y** dada **en grados**:

$$y \in \{y/y = \text{Arcsen } x + 360^\circ k\} \cup \{y/y = (180^\circ - \text{Arcsen } x) + 360^\circ k\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ver cuadro siguiente.

86

Estudiar con atención.



87

Ejemplo:

$$y = \text{arcsen}\,\frac{1}{2}$$

$y \in$ _____

conjunto dado por comprensión

o bien

$y \in$ _____

conjunto dado por extensión

y debe estar dado **en grados.**

$\text{Arcsen}\,\frac{1}{2} = \text{Arcsen}\ 0.5000 = 30°$

- por comprensión:

$$\{y/y = \mathbf{30°} + 360°k\} \cup \{y/y = \mathbf{150°} + 360°k\}$$

$\overbrace{180° - 30°}$

- por extensión:

$$\{\ldots, -330°, \mathbf{30°}, 390°, 750°, \ldots\} \cup \{\ldots, -210, \mathbf{150°}, 510°, 870°, \ldots\}$$

o bien

$$\{\ldots, -330°, -210°, \mathbf{30°}, \mathbf{150°}, 390°, 510°, 750°, \ldots\}$$

88

$$y = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$y \in$ _____

o bien

$y \in$ _____

y debe estar dado **en grados.**

$\text{Arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = \text{Arcsen} - 0.5000 = -30°$

- por comprensión:

$$\{y/y = -30° + 360°k\} \cup \{y/y = 210° + 360°k\}$$

$\overbrace{180° - (-30°)}$

- por extensión:

$$\{\ldots, -390°, \mathbf{-30°}, 330°, 690°,\} \cup \{\ldots, -510°, -150°, \mathbf{210°}, 570°\}$$

o bien

$$\{\ldots, -390°, -150°, \mathbf{-30°}, \mathbf{210°}, 330°, 570°, \ldots\}$$

89

En

$$y = \text{arcsen } x$$

Para toda x,
e y dado **en radianes:**

$$y \in \left\{ y/y = \text{Arcsen } x + 2k\pi \right\} \cup \left\{ y/y = (\pi - \text{Arcsen } x) + 2k\pi \right\}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

90

Ejemplo:

$$y = \text{arcsen } \frac{1}{2}$$

$y \in$ _____
por comprensión

ó

$y \in$ _____
por extensión

y debe estar dado en radianes.

$$\text{Arcsen } \frac{1}{2} \doteq 0.5236$$
$$\doteq 0.1666 \ldots \pi = \frac{\pi}{6}$$

- por comprensión:

$$\left\{ y/y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ y/y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

- por extensión:

$$\cup \left\{ \ldots, -\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \ldots \right\}$$
$$\left\{ \ldots, -\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \ldots \right\}$$

$$\text{ó} \left\{ \ldots, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \ldots \right\}$$

91

Ejemplo:

$$y = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$y \in$ _____
por comprensión

y debe estar dado en radianes.

$$-\frac{1}{2} < 0$$

$$\text{Arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

- $\left\{ y/y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

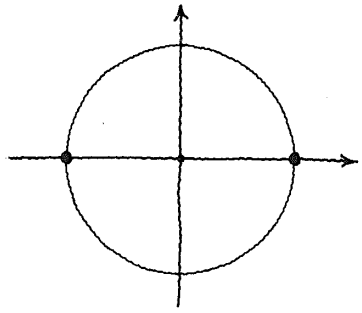
$$\cup \left\{ y/y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

92

En $y = \text{arcsen } x$

Si $x = 0$
e y está dado en grados:

$y \in \{y/y = 180°k\}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$



93

$y = \text{arcsen } x$

Si $x = 0$
e y está dado **en radianes:**

$$y \in \{y/y = 2k\pi\} \cup \{y/y = \pi + 2k\pi\}$$

o bien:

$$y \in \{y/y = 2k\pi\} \cup \{y/y = (2k + 1)\pi\}$$

- $2k\pi$: múltiplos pares de π
- $(2k+1)\pi$: múltiplos impares de π

o bien:

$$y \in \{y/y = k\pi\} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- todos los múltiplos de π (o los múltiplos pares de $\frac{\pi}{2}$)

5.5.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

5.5.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* una función seno ($y = \text{Sen } x$) tal que su inversa sea también una función;
- *definir* la inversa de la función seno "restringida" ($y = \text{Arcsen } x$ ó $y = \text{Sen}^{-1} x$);
- *obtener* la gráfica cartesiana de la función Arcoseno;
- *encontrar* Arcsen x, dado x;
- *encontrar* arcsen x, dado x, expresando el resultado como conjunto definido por comprensión o por extensión.

5.2

Las funciones Coseno y Arcocoseno

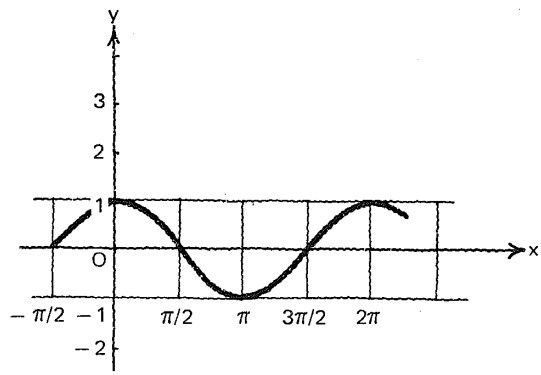
94

Habíamos obtenido la gráfica cartesiana de la función definida por

$$y = \cos x$$

con

dominio $\mathbb{R}$
y
codominio $\mathbb{R}$.



95

Hemos visto que la función así definida es una:

función cualquiera ☐
suprayección ☐
inyección ☐
biyección ☐

función cualquiera

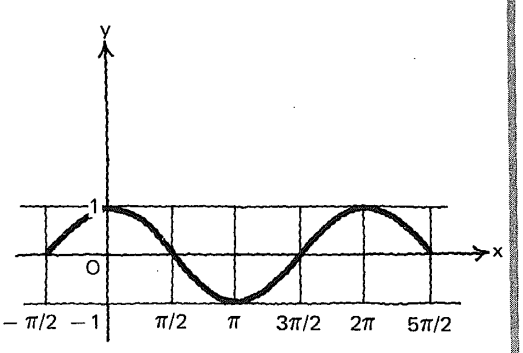
96

Definamos una

suprayección

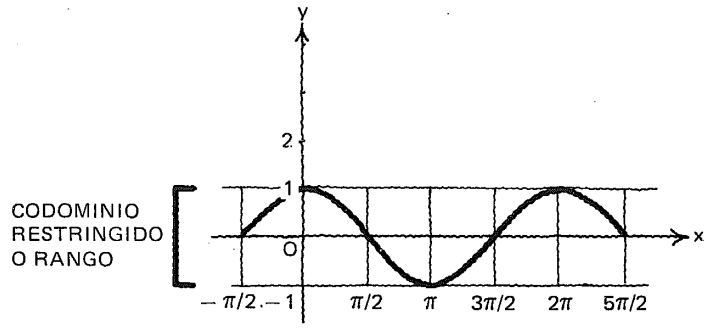
a partir de la función cualquiera que hemos establecido. Es necesario, para ello, restringir el codominio

de $\mathcal{R}$ a [ ]



$\{y/-1 \leqslant y \leqslant 1\}$
o bien
$[-1, 1]$ $y \in \mathcal{R}$

97



Tracemos la gráfica de la inversa de esta suprayección.

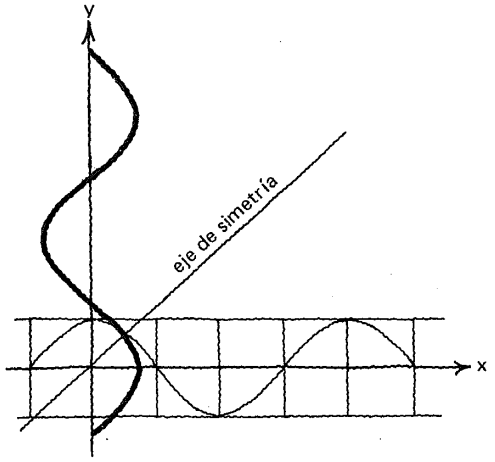
Respuesta en el cuadro siguiente

¿Corresponde esta gráfica a una función?

Sí/No

Porque

[ ]



No

hay al menos una vertical que interseca a la gráfica en dos o más puntos.

98

Vamos, entonces,
a definir una

biyección

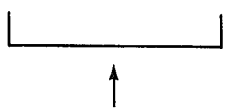
cuya inversa
va a ser, desde luego,
una función.

99

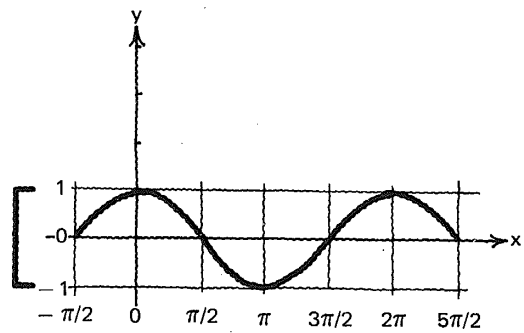
¿Qué intervalo
escogeríamos
como **dominio**

restringido

para esta
biyección?



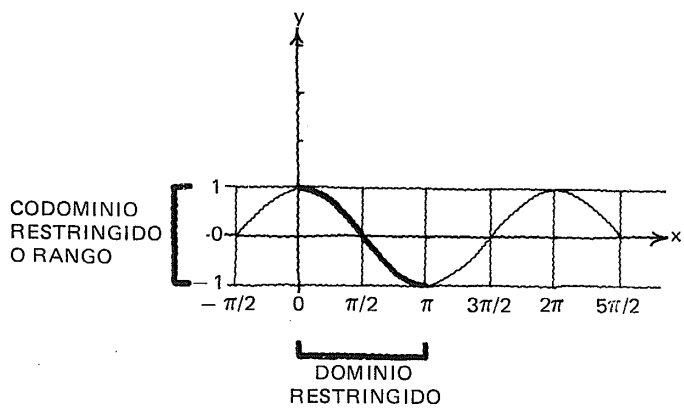
Intentemos darlo.



$[0, \pi]$

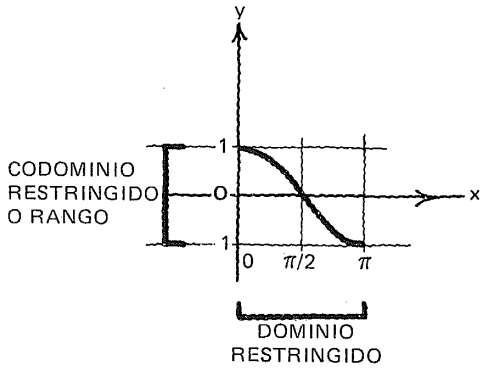
(ver la gráfica del
cuadro siguiente)

100



101

Con el dominio y el rango indicados podemos definir la función coseno "restringida":



$F = \{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant \pi;$
$y \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1 \wedge y = \text{Cos } x\}$

102

La **inversa** de esta función coseno "restringida" queda definida así:

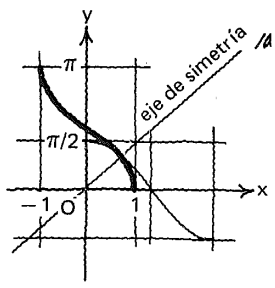
$F^{-1} = \{(x, y)/x \in \mathcal{R}$
$\wedge -1 \leqslant x \leqslant 1;;$
$y \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant y \leqslant \pi$
$\wedge y = \text{Arccos } x\}$

o así:

$F^{-1} : [-1, 1] \rightarrow$
$[0, \pi] / f(x) = \text{Arccos } x$

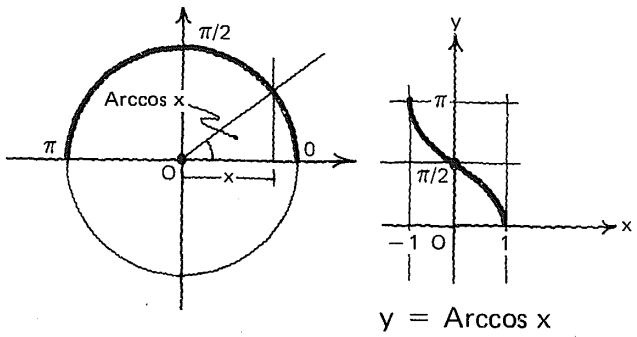
103

Gráfica cartesiana de la función Arcocoseno.



104

Estudiar con atención.



$y = \text{Arccos } x$

ó

$y = \text{Cos}^{-1} x$

- Rango de $y = \text{Arccos } x$

105

Por ejemplo: (expresar con 4 cifras decimales.)

Arccos 0.5864 ≐ ⌊____⌋ radianes,

≐ ⌊____⌋ radianes (en términos de π),

≐ ⌊____⌋ en grados.

0.9442

0.3005 π

54.10° ≐ 54°06′

106

Arccos 0.7071 ≐ ⌊____⌋ radianes,

≐ ⌊____⌋ radianes (en términos de π),

≐ ⌊____⌋ en grados.

0.7854

$0.25\pi = \frac{\pi}{4}$

45°

107

Arccos (−0.8660) ≐ [_____] radianes,

≐ [_____] radianes (en términos de π),

≐ [_____] en grados.

2.6179

0.8333 . . . $\pi = \frac{5\pi}{6}$

150°

108

Arccos 0 = [_____] radianes,

= [_____] radianes (en términos de π),

= [_____] en grados.

1.5708

0.5 $\pi = \frac{\pi}{2}$

90°

109

Arccos (−1) = [_____] radianes,

= [_____] radianes (en términos de π),

= [_____] en grados.

3.1416

π

180°

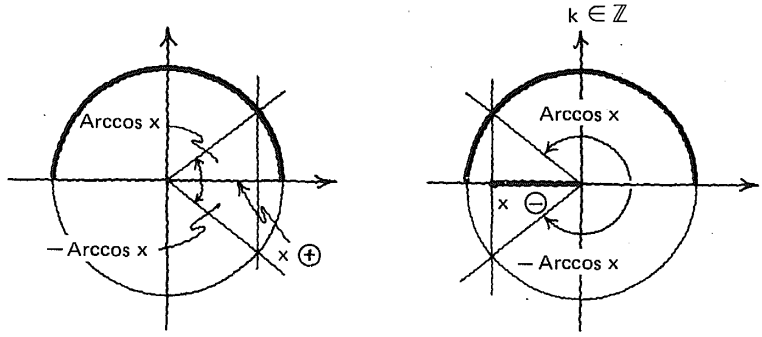
5.5.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

110

Ahora bien, en $y = \textbf{arccos } x$
para toda x,
e **y** dado **en grados**

$$y \in \{y/y = \textbf{Arccos } x + \textbf{360°}k\} \cup \{y/y = -\textbf{Arccos } x + \textbf{360°}k$$



111

Ejemplo:

$$y = \textbf{arccos}\,\frac{1}{2}$$

y ∈ _____
por comprensión

o bien:

Y ∈ _____
por extensión

y debe estar dado **en grados.**

$\text{Arccos}\,\frac{1}{2} = 60°$

- $\{y/y = 60° + 360°k\}$
  $\cup \{y/y = -60° + 360°k\}$
  $k \in \mathbb{Z}$

$\{\ldots, -300°, \mathbf{60°}, 420°, 780°,\}$
$\ldots$
$\cup \{\ldots, -420°, \mathbf{-60°}, 300°, 660°,\}$
$\ldots$

o bien:

- $\{\ldots, -420°, -300°, \mathbf{-60°}, \mathbf{60°}, 300°, 420°, 660°, 780°, \ldots\}$

5.5.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

112

En

$$y = \arccos x$$

Para toda x,
e **y** dado **en radianes**

$$y \in \{y/y = \text{Arccos } x + 2k\pi\} \cup \{y/y = -\text{Arccos } x + 2k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

113

Ejemplo:

$$y = \arccos \frac{1}{2}$$

$y \in$ _____
por comprensión

o bien

$y \in$ _____
por extensión

y debe estar dado en radianes

$$\text{Arccos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

- $\{y/y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\} \cup \{y/y = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\{\ldots, \frac{-5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots\} \cup \{\ldots, \frac{-7\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \ldots\}$$

o bien:

- $\{\ldots, \frac{-7\pi}{3}, \frac{-5\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3} \ldots\}$

5.5.2.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

114

En $y = \arccos x$

si $x = 0$,

e y está dado **en grados:**

$y \in$ _____

- $\{y/y = 90° + 360°k\}$
  $\cup \{y/y = -90° + 360°k\}$

o bien:

- $\{y/y = 90° + 180°k\}$

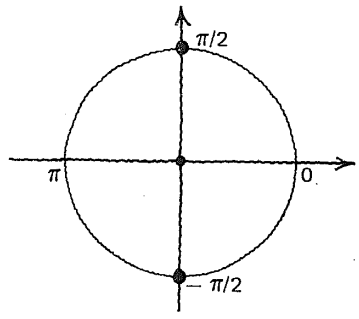
115

En $y = \arccos x$

si $x = 0$

e y está dado **en radianes:**

$y \in$ _____



- $\left\{y/y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left\{y/y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

o bien:

$\left\{y/y = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

o bien:

- $\left\{y/y = (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$

o bien:

los múltiplos impares de $\pi/2$
(en todas las expresiones $k \in \mathbb{Z}$)

5.5.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* una funcion coseno ($y = \text{Cos } x$) tal que su inversa sea también una función;
- *definir* la inversa de la función coseno "restringida", ($y = \text{Arccos } x$ ó $y = \text{Cos}^{-1} x$);
- *obtener* la gráfica cartesiana de la función Arcocoseno;
- *encontrar* Arccos x, dado x;
- *encontrar* arccos x, dado x, expresando el resultado como conjunto definido por comprensión o por extensión.

5.3

Las funciones Tangente y Arcotangente

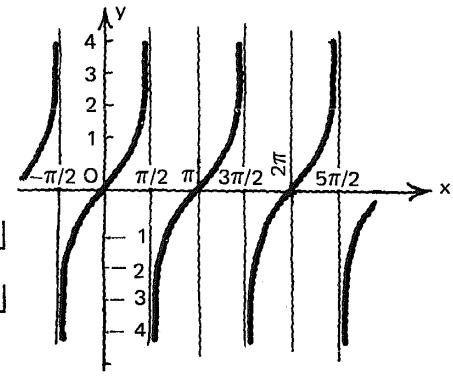
116

Esta es la gráfica de la función definida por

$$y = \tan x$$

con **dominio** ____

y **rango** ____



$\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$

117

Definición de la **función tangente.**

____

ó

____

$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R} \wedge y = \tan x\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$F : \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} / f(x) = \tan x\}$
$k \in \mathbb{Z}$

118

Tal como la hemos definido,
la función tangente es una:

función cualquiera ☐

suprayección ☐

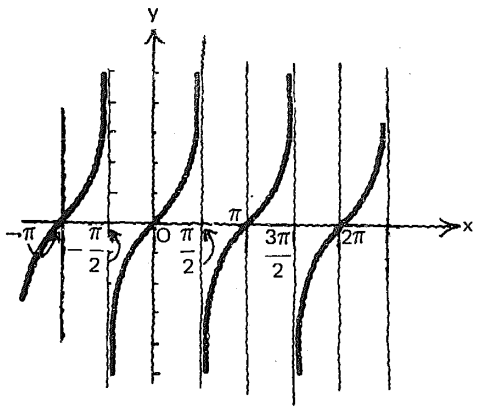
inyección ☐

biyección ☐

suprayección

119

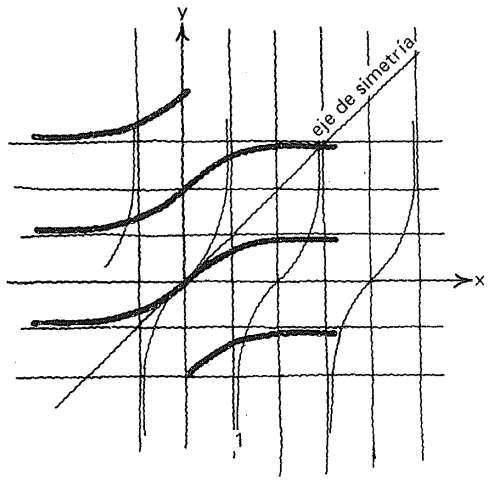
Obtengamos
la gráfica de la
inversa de F.



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica de la relación:

$$\left\{(x, y)/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R} \wedge y \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}; y = \arctan x\right\}$$



120

Ahora bien,
siendo

$$F = \left\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}; y \in \mathbb{R} \wedge y = \tan x\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

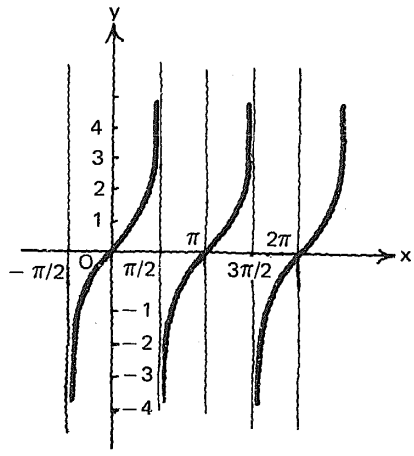
una suprayección,
se requiere únicamente
restringir su [ ]
para establecer una biyección.

dominio

121

Dominio restringido para
definir una biyección

[ ]



$$\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$$

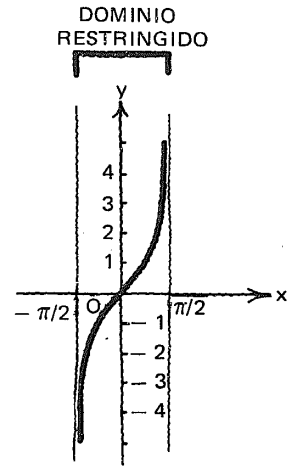
o como intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(ver la gráfica en el
cuadro siguiente)

122

Gráfica de la función
tangente "restringida".



123

Definición de la función tangente "restringida".

$$\left[\quad\right]$$

o bien:

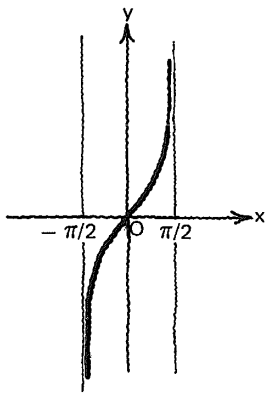
$$\left[\quad\right]$$

$$F_1 = \left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};\ y \in \mathcal{R} \wedge y = \tan x\right\}$$

$$F_1 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathcal{R}/f(x) = \text{Tan } x$$

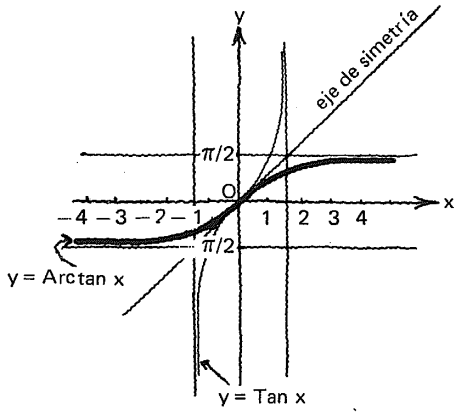
124

Tracemos
la gráfica de la inversade F_1



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica de la función
Arcotangente.



125

Definición de la **función Arcotangente.**

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

ó

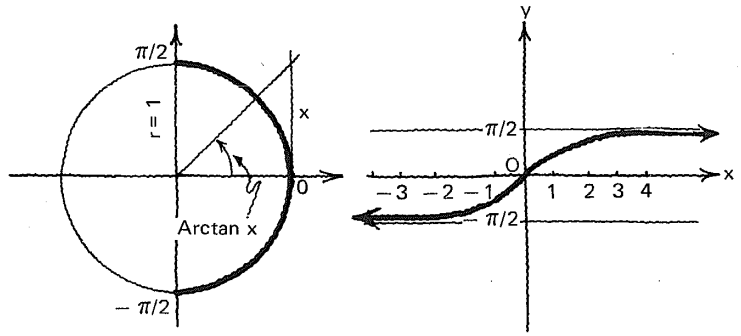
$$\boxed{\qquad\qquad}$$

$F_1^{-1} = \{(x, y)/x \in \mathcal{R};\ y \in \mathcal{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \wedge y = \text{Arctan } x$

$F_1^{-1} : \mathcal{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / f(x) = \text{Arctan } x$

126

Estudiar con atención.



Observamos que Arctan x está definida para todos los números reales.

127

Arctan 1.7321 ≐ $\boxed{\qquad\qquad}$ radianes,

≐ $\boxed{\qquad\qquad}$ radianes (en términos de π)

≐ $\boxed{\qquad\qquad}$ en grados.

1.0472

$0.333 \ldots \pi = \frac{\pi}{3}$

60°

128

Arctan 5.4321 ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

1.3887

0.4420π

$79.57° \doteq 79°34'$

129

Arctan 47.2 ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

1.5496

0.4933π

$88.79° \doteq 88°47'$

130

Arctan 25,896 ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

1.5707577

0.49998771π
(valor muy próximo a $\frac{\pi}{2}$)

89.997788°
(valor muy próximo a 90°)

131

Arctan 0 = [ ] radianes,

= [ ] radianes (en términos de π),

= [ ] en grados.

0

0

0°

132

Arctan (−1) ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

−0.7854

$-0.25\pi = -\frac{\pi}{4}$

−45°

133

Arctan (−158.24) ≐ [ ] radianes,

≐ [ ] radianes (en términos de π),

≐ [ ] en grados.

−1.5645

-0.49799465π
(valor próximo a $-\pi/2$)

−89.64°
(valor próximo a −90°)

134

Arctan $(-\pi)$ $\doteq$ [ ] radianes,

$\doteq$ [ ] radianes (en términos de π),

$\doteq$ [ ] en grados.

$\pi \doteq 3.1416$

-1.2626

-0.4019π

$-72.34° = -72°20'$

135

Observar con atención.

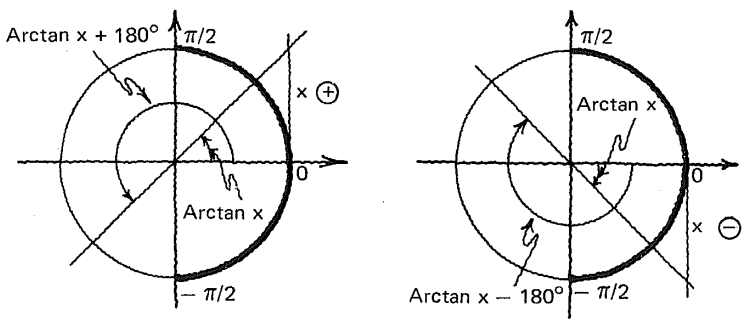
En **y = arctan x**

para toda **x**,
e **y** dado **en grados:**

$$y \in \{y/y = \text{Arctan } x + 180°k\} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ver cuadro siguiente.

136



137

En

y = arctan x

para toda x,
e **y** dado **en radianes:**

$y \in$ _____

$\{y/y = \text{Arctan } x + k\pi\}$
$k \in \mathbb{Z}$

138

Ejemplo:

$y = \arctan 1$

$y \in$ _____
por comprensión

ó

$y \in$ _____
por extensión

y debe estar dado **en grados.**

Arctan 1 = 45°

$\{y/y = 45° + 180°k\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\{\ldots -315°, -135°, 45°, 225°, 405°, \ldots\}$

139

Ejemplo:

$y = \arctan 1$

$y \in$ _____
por comprensión

ó

$y \in$ _____
por extensión

y debe estar dado en radianes.

$\text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$

$\left\{y/y = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\left\{\ldots -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \ldots\right\}$

140

Ejemplo.

$y = \arctan(-1)$

$y \in$ _____
por comprensión

ó

$y \in$ _____
por extensión

y debe estar dado **en grados.**

Arctan $(-1) = -45°$

$\{y/y = -45° + 180°k\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\{\ldots -405°, -225°, -45°, \mathbf{135°}, 315°, \ldots\}$

141

Ejemplo:

$y = \arctan(-1)$

$y \in$ _____
por comprensión

ó

$y \in$ _____
por extensión

y debe estar expresado **en radianes.**

Arctan $(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\{y/y = -\frac{\pi}{4} + k\pi\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\{\ldots, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \ldots\}$

5.5.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

142

En

$y = \arctan x$

si $x = 0$
e y está dado **en grados:**

$y \in$ _____

$\{y/y = 180°k\}$ $k \in \mathbb{Z}$

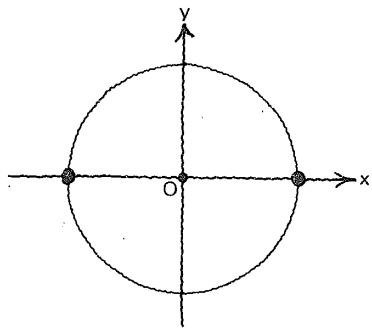
143

En

$y = \arctan x$

si $x = 0$,
e y está dado **en radianes:**

$y \in$ _____



$\{y/y = k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$
(todos los múltiplos de π o los múltiplos pares de $\pi/2$)

5.5.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* una función tangente ($y = \text{Tan } x$) tal que su inversa sea también una función;
- *definir* la inversa de la función tangente "restringida" ($y = \text{Arctan}x$ ó $y = \text{Tan}^{-1} x$);
- *obtener* la gráfica cartesiana de la función Arcotangente;
- *encontrar* Arctan x, dado x;
- *encontrar* arctan x, dado x, expresando el resultado como conjunto definido por comprensión o por extensión.

5.4

Las funciones Cotangente, y Arcocotangente

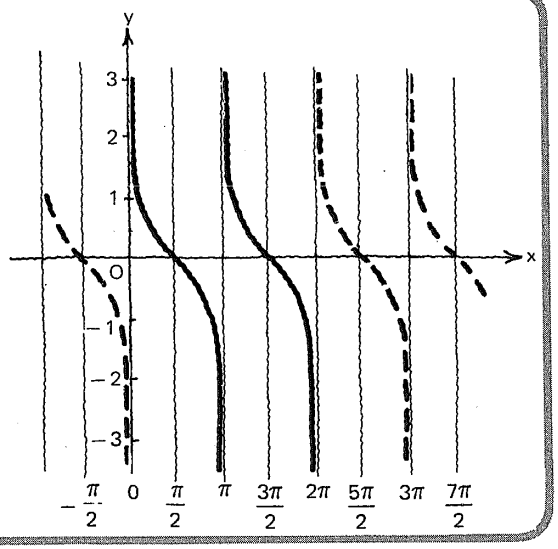
144

Gráfica de la función definida por

y = cot x

con **dominio** ⌊___⌋

y **rango** ⌊___⌋



$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$

145

Definición de la **función cotangente.**

⌊_____⌋

ó

⌊_____⌋

$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi;$
$y \in \mathbb{R} \wedge y = \cot x\}$

$F : \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\} \rightarrow$
$\mathbb{R} / f(x) = \cot x$

en ambas expresiones: $k \in \mathbb{Z}$

146

La función cotangente, así definida, es una:

función cualquiera ☐

suprayección ☐

inyección ☐

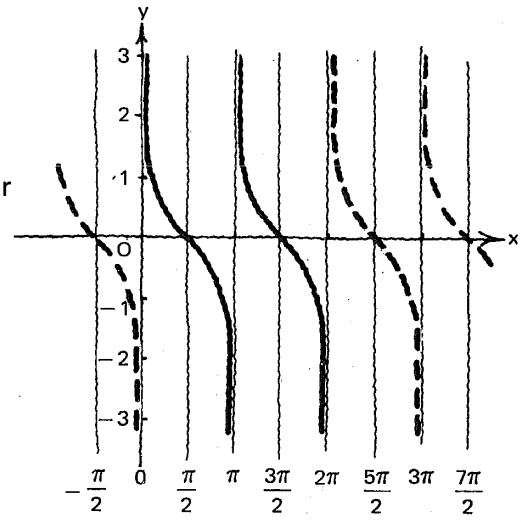
biyección ☐

suprayección

147

Dominio
restringido para definir una biyección:

☐



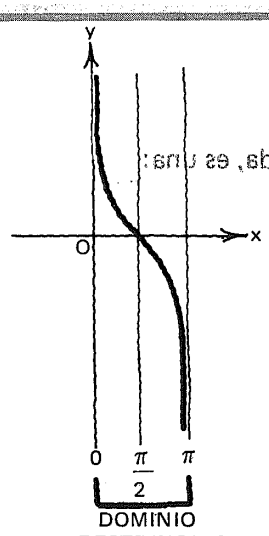
$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < \pi\}$
o en forma de intervalo:
$(0, \pi)$

148

Gráfica de la función cotangente "restringida"

Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de la función cotangente "restringida"



149

Definición de la función cotangente "restringida"

$$F_1 = \{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge 0 < x < \pi; y \in \mathcal{R} \wedge y = \operatorname{Cot} x\}$$

o bien

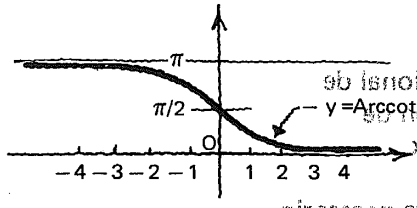
$$F_1 : (0, \pi) \rightarrow \mathcal{R}/f(x) = \operatorname{Cot} x$$

150

Gráfica de la inversa de F_1

Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de la función Arcocotangente.



151

Definición de la **función Arcocotangente.**

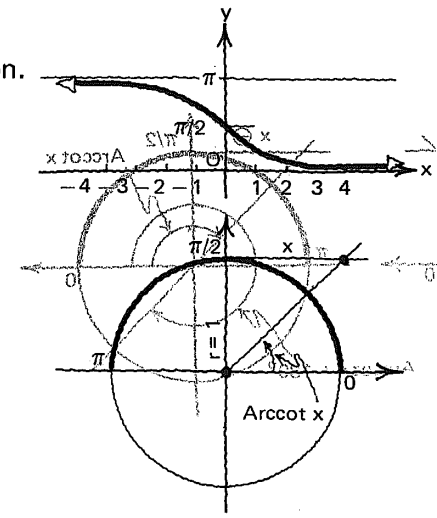
ó

$F_1^{-1} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R} \wedge 0 < y < \pi \wedge y = \text{Arccot } x\}$

$F_1^{-1}: \mathbb{R} \to (0, \pi)/f(x) = \text{Arccot } x$

152

Estudiar con atención.



Observamos que Arccot x está definida para todos los números reales.

5.5.4.1

Práctica adicional de
determinación de
$y = \text{Arccot } x$
a partir de x,
si se considera necesario.

153

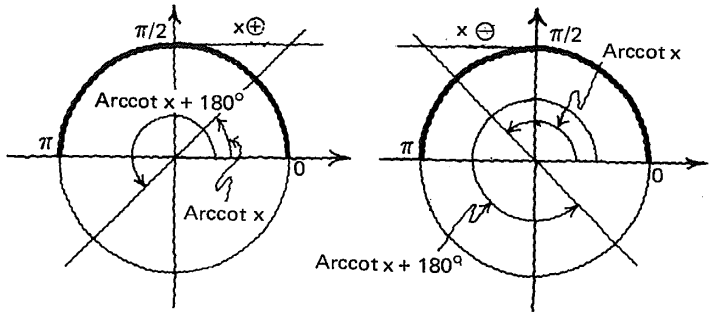
En
$y = \textbf{arccot } x$
para toda **x**,
e **y** dado **en grados**:

$y \in$ _____

$\{y/y = \text{Arccot } x + 180°k\}$
$k \in \mathbb{Z}$

Véase cuadro siguiente.

154



155

En
$y = \text{arccot } x$
para toda **x**,
e **y** dado **en radianes:**

$y \in$ [_____]

$\{y/y = \text{Arccot } x + k\pi\}$
$k \in \mathbb{Z}$

5.5.4.2

Práctica adicional de
determinación de
$y = \text{arccot } x$
a partir de x,
si se considera necesario.

5.5.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* una función cotangente ($y = \text{Cot } x$) tal que su inversa sea también una función;
- *definir* la inversa de la función cotangente "restringida" ($y = \text{Arccot } x$ ó $y = \text{Cot}^{-1} x$);
- *obtener* la gráfica cartesiana de la función Arcocotangente;
- *encontrar* Arccot x, dado x;
- *encontrar* arccot x, dado x, expresando el resultado como conjunto definido por comprensión o por extensión.

5.5

Las funciones Secante y Arcosecante

156

Gráfica de la función definida por

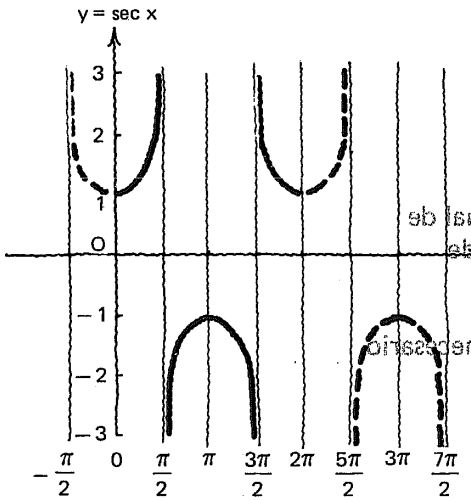
y = sec x

con **dominio**

[ ]

y **rango**

[ ]



$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$

$k \in \mathbb{Z}$

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1)\}$

157

Definición de la **función secante** en términos del dominio y el rango

$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1) \wedge y = \sec x\}$

$k \notin \mathbb{Z}$

ó

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi/2\} \rightarrow \{y/y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1)\}$

$F: f(x) = \sec x$

$k \in \mathbb{Z}$

158

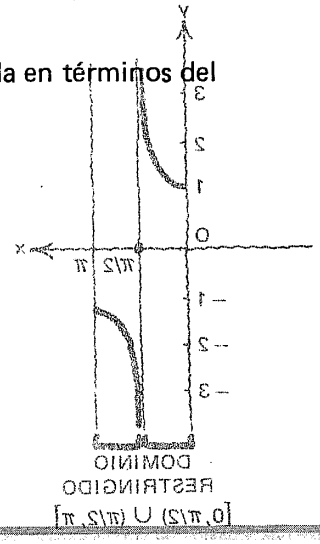
La función secante, así definida en términos del dominio y el rango, es una:

función cualquiera ⌊___⌋

suprayección ⌊___⌋

inyección ⌊___⌋

biyección ⌊___⌋



DOMINIO
RESTRINGIDO
$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

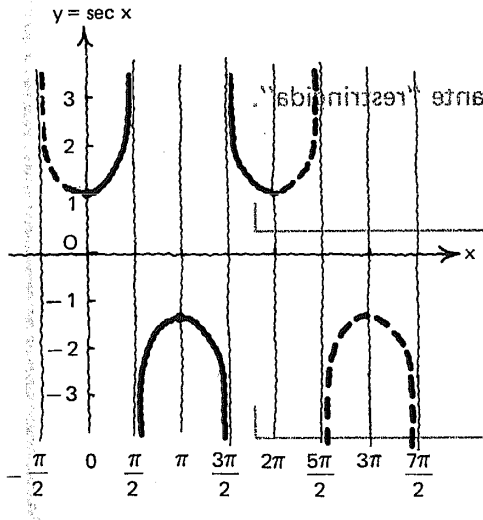
suprayección

159

¡Atención!

Dominio restringido para definir una biyección:

⌊___⌋



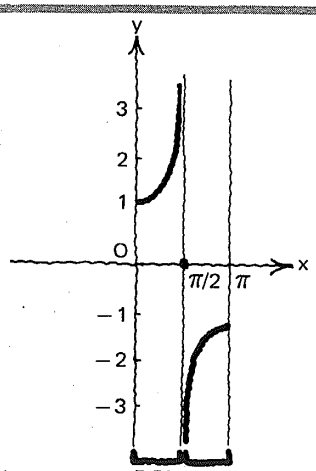
$\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant \pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$

160

Gráfica de la función secante "restringida"

Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de la función secante "restringida".



DOMINIO RESTRINGIDO
$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

161

Definición de la función secante "restringida".

ó

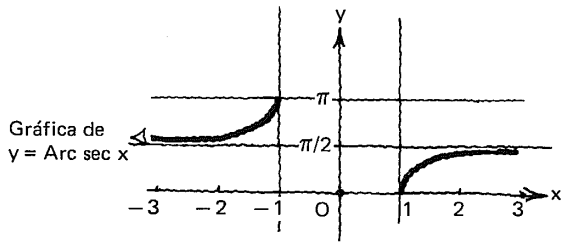
$F_1 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \in [0, \pi/2) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1) \wedge y = \text{Sec } x\}$

$F_1 : \{[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]\} \rightarrow \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} / f(x) = \text{Sec } x$

162

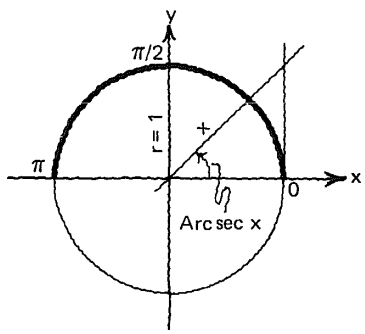
Gráfica de la inversa de F_1

Respuesta en el cuadro siguiente



163

Arcsec x
está definida
para todos los números
reales, exceptuando
los comprendidos
entre −1 y 1,
o sea para:
$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$



164

Definición de la **función Arcosecante.**

_____

ó

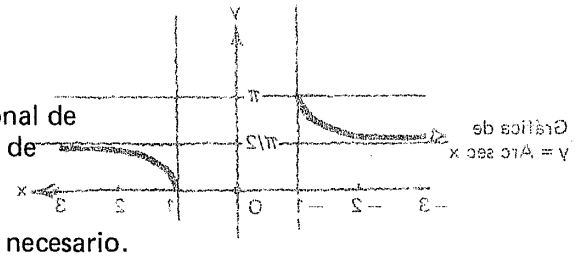
_____

$F_1^{-1} = \{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge x \notin (-1, 1);$
$y \in \mathcal{R} \wedge y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
$\wedge\ y = \text{Arcsec } x\}$

$F_1^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\rightarrow [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] / f(x) = \text{Arcsec } x$

5.5.5.1

Práctica adicional de determinación de $y = \text{Arcsec } x$ a partir de x, si se considera necesario.

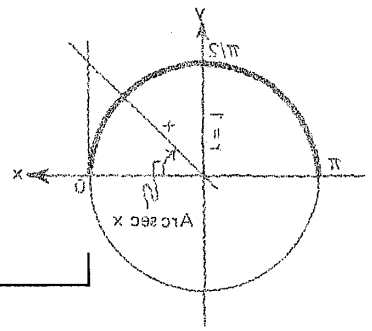


165

Estudiar con atención.

En **$y = \text{arcsec } x$** para toda x, e y dado **en grados:**

$y \in$ _____



Véase cuadro siguiente.

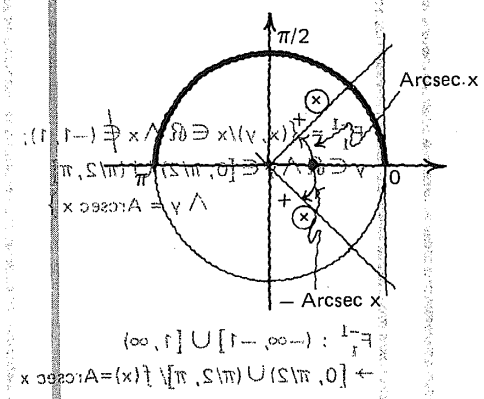
$\text{Arcsec } x$ está definida para todos los números reales, exceptuando los comprendidos entre -1 y 1,

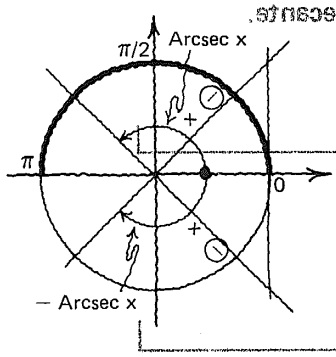
$\{y / y = \text{Arcsec } x + 360° k\} \cup \{y / y = -\text{Arcsec } x + 360° k\}$

$k \in \mathbb{Z}$

166

Definición de la función Arcosecante.





ó

_____

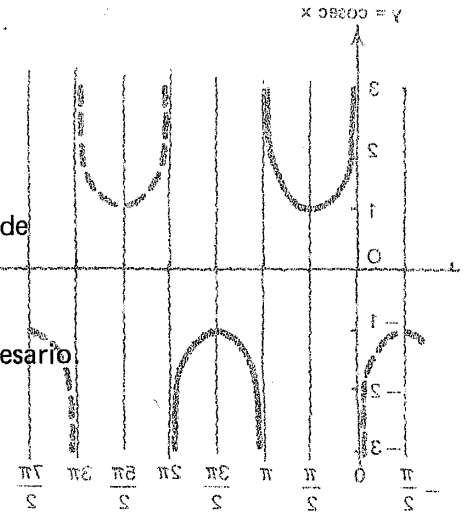
En $y = \text{arcsec}\, x$
para toda **x**,
e **y** dado **en radianes**:

$y \in$ _____

$\{y / y = \text{Arcsec}\, x + 2k\pi\}$
$\cup \{y / y = -\text{Arcsec}\, x + 2k\pi\}$
$k \in \mathbb{Z}$

5.5.5.2

Práctica adicional de determinación de $y = \text{arcsec}\, x$ a partir de x, si se considera necesario.



5.5.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* una función secante ($y = \text{Sec}\, x$) tal que su inversa sea también una función;
- *definir* la inversa de la función secante "restringida" ($y = \text{Arcsec}\, x$ ó $y = \text{Sec}^{-1} x$);
- *obtener* la gráfica cartesiana de la función Arcosecante;
- *encontrar* Arcsec x, dado x;
- *encontrar* arcsec x, dado x, expresando el resultado como conjunto definido por comprensión o por extensión.

5.6

Las funciones Cosecante
y Arcocosecante

168

Gráfica de la función definida por

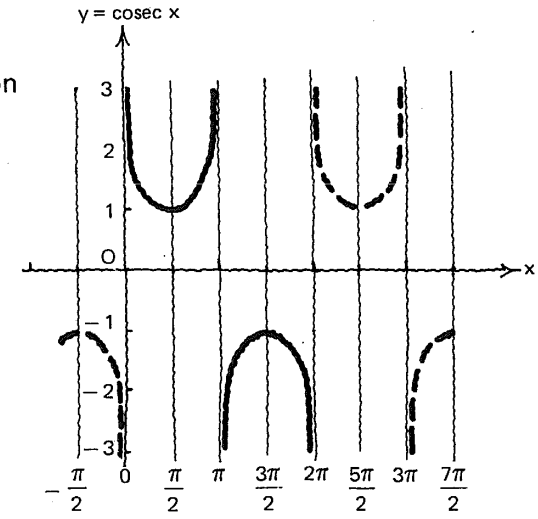
y = cosec x

con **dominio**

[ ]

y **rango**

[ ]



$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1)\}$

169

Definición de la **función cosecante** en términos del dominio y el rango.

F = [ ]

o

F : [ ]

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi;$
$y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1) \wedge y = \text{cosec } x\}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\} \rightarrow$
$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1)\}/y = \text{cosec } x\}$
$k \in \mathbb{Z}$

170

Identificamos la función cosecante como una:

función cualquiera [ ]

suprayección [ ]

inyección [ ]

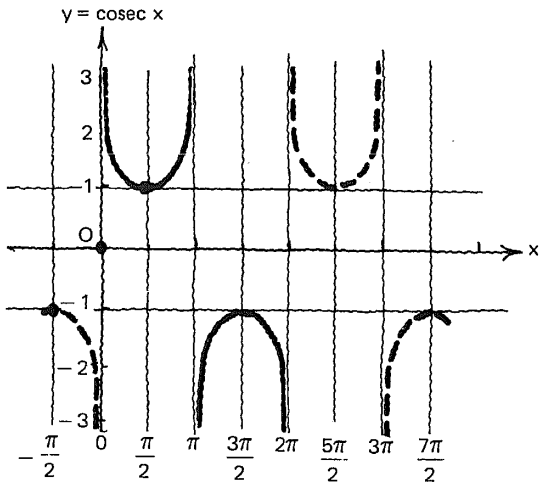
biyección [ ]

suprayección

171

Dominio restringido para definir una biyección:

[ ]



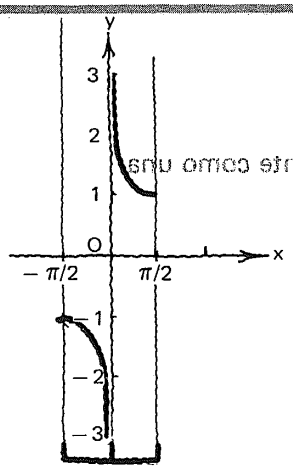
$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge \frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \wedge x \neq 0\}$

172

Gráfica de la función cosecante "restringida".

Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de la función cosecante "restringida".

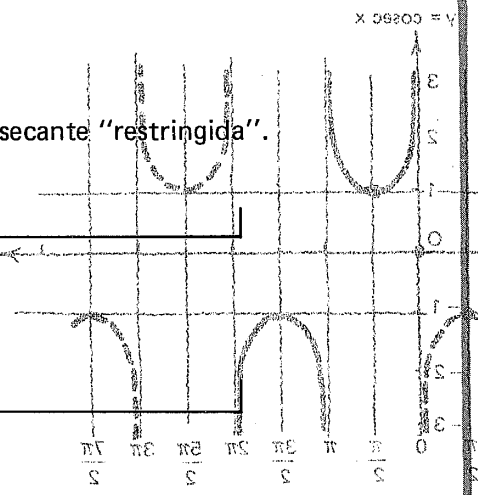


DOMINIO RESTRINGIDO

$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

173

Definición de la función cosecante "restringida".



$F_1 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \in [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]; y \in \mathbb{R} \wedge y \notin (-1, 1) \wedge y = \text{Cosec } x\}$

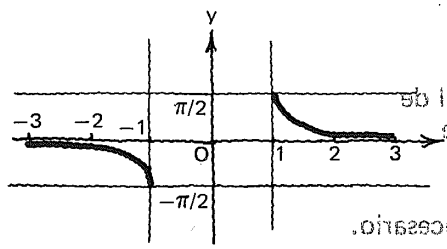
$F_1 : \{[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]\} \rightarrow \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} / f(x) = \text{Cosec } x$

174

Gráfica de la inversa de F_1

Respuesta en el cuadro siguiente

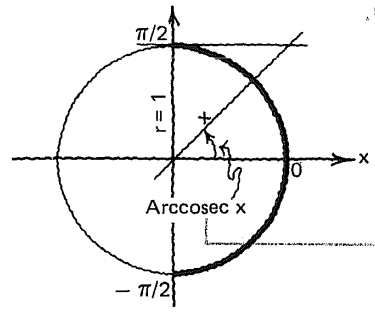
Gráfica de
y = Arccosec x



175

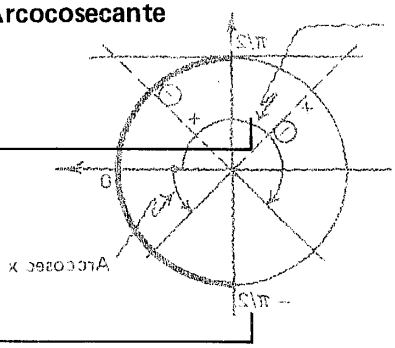
Arccosec x

está definida para
todos los números reales,
exceptuando los
comprendidos entre
−1 y 1,
es decir, para:
$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$



176

Definición de la **función Arcocosecante**



$F_1^{-1} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \notin (-1, 1);$
$y \in \mathbb{R} \wedge y \in [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
$\wedge\ y = \text{Arccosec}\, x\}$

ó

$F_1^{-1} \quad \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$
$\rightarrow \{[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]\}$
$/ f(x) = \text{Arccosec}\, x$

5.5.6.1

Práctica adicional de
determinación de
$y = \text{Arccosec } x$
a partir de x,
si se considera necesario.

177

Estudiar con atención.

$y = \text{arccosec } x$

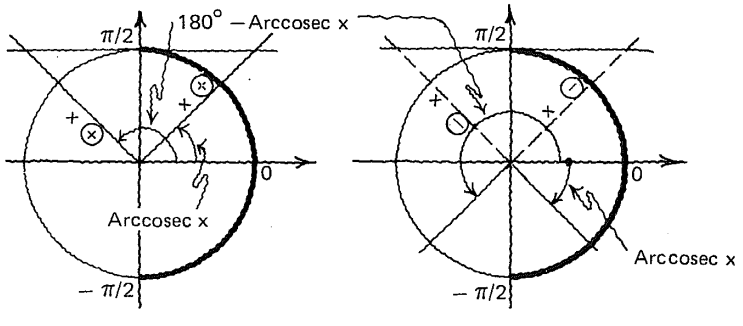
para toda **x**,
e **y** dado **en grados**:

$y \in$ [ ]

Ver cuadro siguiente.

$\cup \{y/y = \text{Arccosec } x + 360°k\}$
$\{y/y = (180° - \text{Arccosec } x) + 360°k\}$
$k \in \mathbb{Z}$

178



179

En
$y = \text{arccosec } x$
para toda **x**,
e **y** dado **en radianes:**

$y \in$ [_____]

$\{y/y = \text{Arccosec } x + 2k\pi\}$
$\cup \{y/y = (\pi - \text{Arccosec } x) + 2k\pi\}$
$k \in \mathbb{Z}$

5.5.6.2

Práctica adicional de
determinación de
$y = \text{arccosec } x$
a partir de x,
si se considera necesario.

180

Quedan, así, definidas las 6 **funciones trigonométricas inversas.**

1. $y = \text{Arcsen } x$ ó $y = \text{Sen}^{-1} x$ • función Arcoseno
2. $y = \text{Arccos } x$ ó $y = \text{Cos}^{-1} x$ • función Arcocoseno
3. $y = \text{Arctan } x$ ó $y = \text{Tan}^{-1} x$ • función Arcotangente
4. $y = \text{Arccotx}$ ó $y = \text{Cot}^{-1} x$ • función Arcocotangente
5. $y = \text{Arcsec } x$ ó $y = \text{Sec}^{-1} x$ • función Arcosecante
6. $y = \text{Arccosec } x$ ó $y = \text{Cosec}^{-1} x$ • función Arcocosecante

5.5.6.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

181

Resumen 2. Las funciones trigonométricas restringidas $y = F_t(x)$.

función	*dominio*	*rango*	*regla*
Seno	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	$f(x) = \text{Sen } x$
Coseno	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$f(x) = \text{Cos } x$
Tangente	$\left(-\pi/2, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \text{Tan } x$
Cotangente	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \text{Cot } x$
Secante	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$f(x) = \text{Sec } x$
Cosecante	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$f(x) = \text{Cosec } x$

182

Resumen 3. Las funciones trigonométricas inversas $y = \text{Arc}\, f_t(x)$ o $y = F_t^{-1}(x)$

función	*dominio*	*rango*	*regla*
Arcoseno	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$f(x) = \text{Arcsen } x$ ó $f(x) = \text{Sen}^{-1} x$
Arcocoseno	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$f(x) = \text{Arccos } x$ ó $f(x) = \text{Cos}^{-1} x$
Arcotangente	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$f(x) = \text{Arctan } x$ ó $f(x) = \text{Tan}^{-1} x$
Arcocotangente	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$	$f(x) = \text{Arccot } x$ ó $f(x) = \text{Cot}^{-1} x$
Arcosecante	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$f(x) = \text{Arcsec } x$ ó $f(x) = \text{Sec}^{-1} x$
Arcocosecante	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$	$f(x) = \text{Arccosec } x$ ó $f(x) = \text{Cosec}^{-1} x$

183

Resumen 4. Las relaciones trigonométricas inversas (no restringidas) $y = \text{arc}\, f_t(x)$ o $y = f_t^{-1}(x)$.

relación	*dominio*	*rango*	*regla*
arcoseno	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \text{arcsen } x$ ó $f(x) = \text{sen}^{-1} x$
arcocoseno	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \arccos x$ ó $f(x) = \cos^{-1} x$
arcotangente	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \wedge y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = \arctan x$ ó $f(x) = \tan^{-1} x$
arcocotangente	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \wedge y \neq k\pi;\quad k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = \text{arccot } x$ ó $f(x) = \cot^{-1} x$
arcosecante	$\mathbb{R} - (-1, 1)$	$\mathbb{R} \wedge y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = \text{arcsec } x$ ó $f(x) = \sec^{-1} x$
arcocosecante	$\mathbb{R} - (-1, 1)$	$\mathbb{R} \wedge y \neq k\pi;\quad k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = \text{arccosec } x$ ó $f(x) = \text{cosec}^{-1} x$

184

Resumen 5. $y = \text{arc}\, f_t(x)$ en términos de Arc $f_t(x)$, y en grados.

relación	*arc $f_t(x)$ en términos de Arc $f_t(x)$*
$y = \text{arcsen } x$	$y = \text{Arcsen } x + 360°k$ ó $y = (180° - \text{Arcsen } x) + 360°k$
$y = \arccos x$	$y = \text{Arccos } x + 360°k$ ó $y = -\text{Arccos } x + 360°k$
$y = \arctan x$	$y = \text{Arctan } x + 180°k$
$y = \text{arccot } x$	$y = \text{Arccot } x + 180°k$
$y = \text{arcsec } x$	$y = \text{Arcsec } x + 360°k$ ó $y = -\text{Arcsec } x + 360°k$
$y = \text{arccosec } x$	$y = \text{Arccosec } x + 360°k$ ó $y = (180° - \text{Arccosec } x) + 360°k$

$k \in \mathbb{Z}$

185

Resumen 6. $y = \text{arc}\, f_t(x)$ en términos de Arc $f_t(x)$, y en radianes

relación	*arc $f_t(x)$ en términos de Arc $f_t(x)$*
$y = \text{arcsen } x$	$y = \text{Arcsen } x + 2k\pi$ ó $y = (\pi - \text{Arcsen } x) + 2k\pi$
$y = \arccos x$	$y = \text{Arccos } x + 2k\pi$ ó $y = -\text{Arccos } x + 2k\pi$
$y = \arctan x$	$y = \text{Arctan } x + k\pi$
$y = \text{arccot } x$	$y = \text{Arccot } x + k\pi$
$y = \text{arcsec } x$	$y = \text{Arcsec } x + 2k\pi$ ó $y = -\text{Arcsec } x + 2k\pi$
$y = \text{arccosec } x$	$y = \text{Arccosec } x + 2k\pi$ ó $y = (\pi - \text{Arccosec } x) + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

5.5.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* una función cosecante (y = Cosec x) tal que su inversa sea también una función;
- *definir* la inversa de la función cosecante "restringida" (y = Arccosec x ó y = Cosec^{-1} x);
- *obtener* la gráfica cartesiana de la función Arcocosecante;
- *encontrar* Arccosec x, dado x;
- *encontrar* arccosec x, dado x, expresando el resultado como conjunto definido por comprensión o por extensión;
- *determinar* el valor numérico de expresiones tales como:

  $\text{Arctan}\ \frac{1}{2} + \text{Arctan}\ \frac{1}{3}$

  cos (Arcsen 1)

  $8 \tan\left(\text{Arctan}\ \frac{1}{2}\right)$

  $6 \cos^2 [\text{Arcsen}(-2/3)]$

  etcétera.